Centre Tamoul d'Enseignement en France
Examen d'aptitude 2015

Épreuve de Mathématiques

Terminale Scientifique

Eléments de corrections

<u>Cadre réservé à l'administration :</u>

N° d'identification : ________________________________

Avril 2015

Exercice 1 :

Partie A

1. Pour tout point M de l'espace, on a :
$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}\right) + \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IA}$
or I est le milieu du segment [AD], donc $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA}$,
et par conséquent , $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{O} - IA^2 = MI^2 - IA^2$

2. Pour tout point M de l'espace, on a :
$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0 \iff MI^2 = IA^2 \iff MI = IA$ car MI et IA sont des réels positifs.
L'ensemble (E) cherché est donc la sphère de centre I passant par A.

Partie B

1. **a.** $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = -3 \times 4 + 6 \times 2 + 0 \times 0 = 0$
$\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n} = -3 \times 4 + 0 \times 0 + 4 \times 3 = 0$
donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC),
on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) a une équation de la forme : $4x + 2y + 3z + d = 0$.
Le point A(3;0;0) appartient au plan (ABC), donc $4 \times 3 + d = 0 \iff d = -12$.
(ABC) : $4x + 2y + 3z - 12 = 0$.

2. **a.** La droite Δ est orthogonale au plan (ABC), donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de Δ. On sait également que D(−5;0;1) est un point de Δ.

On en déduit une représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. Le point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), est le point d'intersection de D et du plan (ABC).
On résout :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ -20 + 16t + 4t + 3 + 9t - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-5+4t \\ y=0+2t \\ z=1+3t \\ t=\dfrac{29}{29}=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=4 \\ t=1 \end{cases}$$ On obtient ainsi $H(-1;2;4)$.

c. H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), donc la distance du point D au plan (ABC) est égale à la distance DH= $\sqrt{(-1+5)^2+2^2+(4-1)^2}=\sqrt{29}$.

d. Les points H et D appartiennent à la droite Δ.
Le vecteur $\overrightarrow{HD}$ est donc orthogonal au plan (ABC).
De plus, les points H et D appartiennent au plan (ABC), donc le vecteur $\overrightarrow{HD}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{HA}$,
ainsi $\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{HA}=0$, donc H appartient à l'ensemble (E).

Exercice 2 :

1. Pour $x\in]1\,;\,+\infty[$, on a $\ln x>0$ et on sait que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$, on en déduit que f est une fonction dérivable sur $]1;+\infty[$, avec :
$f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{(\ln x)^2+1}{x(\ln x)^2}$.
Pour $x\in]1\,;\,+\infty[$, on a $(\ln x)^2+1>1>0$ et $x(\ln x)^2>0$, et donc $f'(x)>0$.
On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$, avec $\ln x>0$ pour $x>1$, par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{\ln x}=+\infty$
et donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2. a. Pour $x\in]1;+\infty[$, on a $f(x)-\ln x=-\dfrac{1}{\ln x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\ln x=0$.
On en déduit que $(\mathscr{C})$ et Γ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$.

b. Pour $x\in]1\,;\,+\infty[$, on a $\ln x>0$ et donc $-\dfrac{1}{\ln x}<0$,
par conséquent $(\mathscr{C})$ est en dessous de Γ sur $]1\,;\,+\infty[$.

3. a. La tangente $\mathscr{F}_a$ a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
Le point O appartient à $\mathscr{F}_a \iff 0==f'(a)(0-a)+f(a) \iff f(a)-af'(a)=0$.

b. Sur $]1;+\infty[$, on a $(\ln x)^2\neq0$, donc :
$g(x)=0 \iff f(x)-xf'(x)=0 \iff \ln x-\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{(\ln x)^2+1}{(\ln x)^2}=0$
$\iff \dfrac{(\ln x)^3-\ln x-(\ln x)^2-1}{(\ln x)^2}=0 \iff (\ln x)^3-\ln x-(\ln x)^2-1=0.$

c. La fonction u est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$,
avec $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$.
On a $\Delta = 16$, donc u' admet deux racines distinctes :
$t_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $t_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1$.
De plus, $u'(t) > 0$ pour $t \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]1; +\infty[$ et $u'(t) < 0$ pour $t \in]-\frac{1}{3}; 1[$.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u(t)$		$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

La fonction u est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right[$ et décroissante sur $\left]-\frac{1}{3}\,;\,1\right[$.

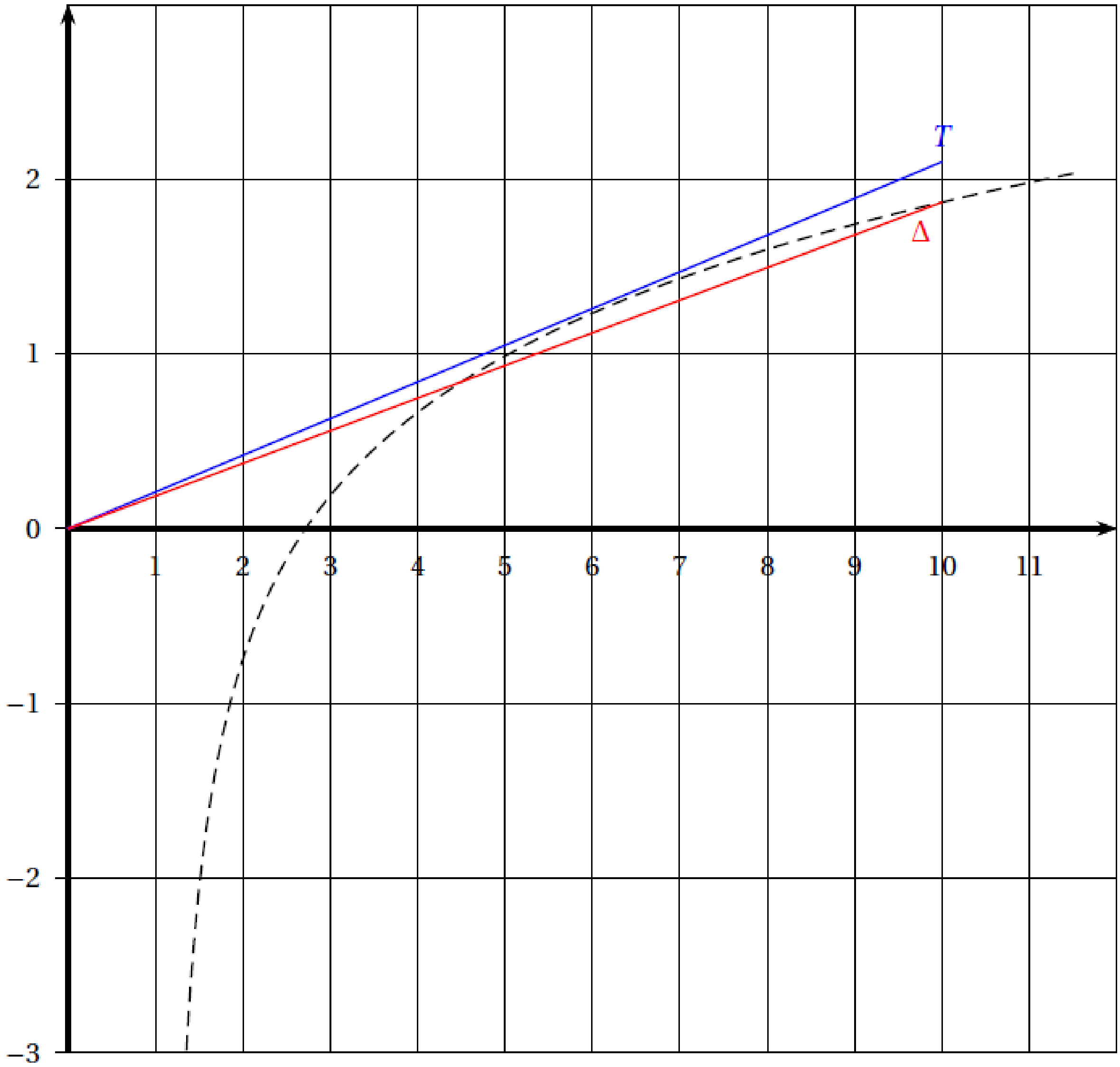
Par conséquent, sur $]-\infty\,;\,1[$, la fonction u admet un maximum en $-\frac{1}{3}$.

Ce maximum vaut $-\frac{22}{27}$, ainsi l'équation $u(t) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty\,;\,1[$.
La fonction u est continue et strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, avec $u(1) = -2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$.
Or $0 \in [-2; +\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution sur $[1\,;\,+\infty[$, par conséquent, l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution, α, sur $\mathbb{R}$.

d. L'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ est équivalente au système $\begin{cases} t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \ln x \end{cases}$

D'après ce qui précède, $\alpha \geqslant 1 > 0$, donc le réel x, tel que $\ln x = \alpha$, appartient à $]1\,;\,+\infty[$, ainsi l'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]1\,;\,+\infty[$, il en est alors de même pour l'équation $g(x) = 0$ (d'après **3. b.**), et donc il existe une unique tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par l'origine du repère (d'après **3. a.**).

4. Soit p le coefficient directeur de la tangente T que l'on vient de tracer.
Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$:
Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.
En traçant la droite Δ, passant par l'origine et par le point de coordonnées $(10\,;\,f(10))$, de coefficient directeur noté q, on obtient le résultat suivant :
Sur l'intervalle $]1\,;\,10[$:
Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < q$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution unique.
Pour $q \leq m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.



Exercice 3 :

1. a. Pour $t \in [0;1]$, on a $t^n \geqslant 0$, $0 \leq \cos t \leq 1$ car $[0;1] \subset \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $t^n \cos t \geqslant 0$.
   On en déduit que $x_n \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n+1} \cos t - t^n \cos t \,\mathrm{d}t$
   $= \int_0^1 t^n (t-1) \cos t \,\mathrm{d}t$.
   Pour $t \in [0;1]$, on a $t^n \cos t \geqslant 0$, $t - 1 \leq 0$ et donc $t^n(t-1)\cos t \leq 0$,
   par conséquent $x_{n+1} - x_n \leq 0$ ce qui démontre que la suite (x_n) est décroissante.

   c. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers ℓ, avec $\ell \geqslant 0$ (théorème de convergence monotone).

2. a. Pour $t \in [0;1]$, on a $t^n \geqslant 0$, $0 \leq \cos t \leq 1$ et donc $0 \leq t^n \cos t \leq t^n$.
   D'après le théorème de comparaison des intégrales, on en déduit :
   $\int_0^1 t^n \cos t \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t$, or $\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
   Par conséquent, $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

   b. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème des «gendarmes», on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3. a. On réalise une intégration par parties :
   $x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1) t^n \sin t \,\mathrm{d}t$
   $= 1^{n+1} \sin(1) - (n+1) \int_0^1 t^n \sin t \,\mathrm{d}t$
   donc, pour tout entier n non nul, on a $x_{n+1} = -(n+1) y_n + \sin(1)$.

   b. On a $y_n = \frac{\sin(1) - x_{n+1}}{n+1}$, or $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$,
   donc $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

4. Pour tout entier n non nul, on a $x_{n+1} = -(n+1) y_n + \sin(1) = -n y_n - y_n + \sin(1)$.
   $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} -y_n + \sin(1) = \sin(1)$,
   par conséquent $\lim_{n\to+\infty} n y_n = \sin(1)$.
   De même, on a $y_{n+1} = (n+1) x_n - \cos(1) = n x_n + x_n - \cos(1)$.
   $\lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} x_n - \cos(1) = -\cos(1)$,
   par conséquent $\lim_{n\to+\infty} n x_n = \cos(1)$.

Exercice 4 :

1. **a.** La fonction u somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur ce même intervalle et
$u'(x) = 3x^2 + 2 \times \dfrac{1}{x} > 0$ comme somme de termes positifs. Donc la fonction u est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   b. On a $u(1) = 1 - 1 + 2\ln 1 = 0$.
   Conclusion : $u(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$ et $u(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$.

2. Étude de la fonction f

   a. On a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ la seconde fonction quotient ayant un dénominateur non nul : elle est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et
$f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln x}{x^4} = 1 - \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \dfrac{u(x)}{x^3}$.
   Donc $f'(x)$ est du signe de $u(x)$ puisque $x^3 > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.
   D'après la question **1. b.** on en déduit que $f'(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$.

   D'où le tableau de variations de la fonction f :

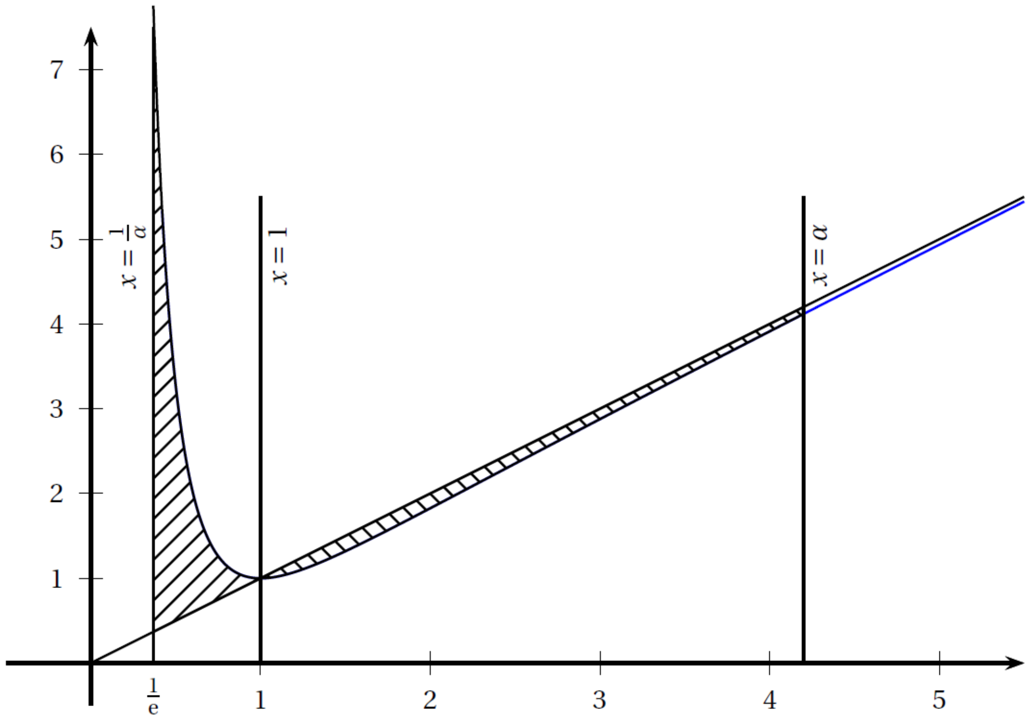
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Éléments graphiques et tracés.

   a. Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to +\infty} -\dfrac{\ln x}{x^2} = 0$, ceci montre que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

   b. Comme $-\dfrac{\ln x}{x^2} < 0$ pour $x > 1$, ceci montre que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de (Δ) à partir du point $(1\,;\,1)$.
   Sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ.
   $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes en $(1\,;\,1)$.

   c. Figure



Calculs d'aires

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$. On a vu que pour $x \geqslant 1$, $f(x) \leqslant x$; donc $\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \left(x - \left[x - \frac{\ln x}{x^2}\right]\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$.

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} & v(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Toutes ces fonctions étant dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$ on peut intégrer par parties et ;

$\mathscr{A}(\alpha) = \left[-\dfrac{\ln x}{x}\right]_1^{\alpha} + \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 0 + 1 = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

2. Comme $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0$, on a

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha) = \ell = 1.$$

3. Comme $e > 2$, on a $\frac{1}{e} < \frac{1}{2} < 1$. On a vu que dans ce cas la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite (Δ), donc :

$$\mathscr{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} \left[-\frac{\ln x}{x^2}\right] \mathrm{d}x$$

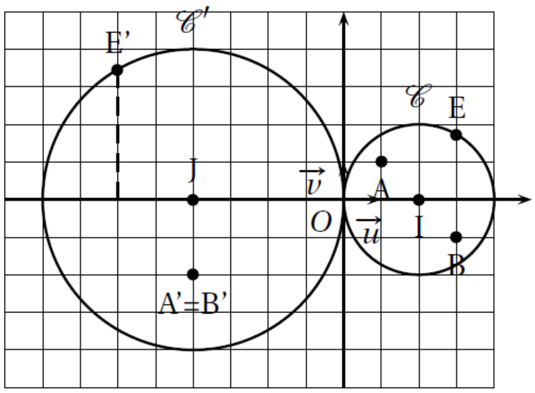
En intégrant par parties comme précédemment les fonctions étant dérivables sur $[\alpha\ ;\ 1]$, on obtient

$$\mathscr{A}(\alpha) = \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right]_{\alpha}^{1} = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}.$$

En particulier $\mathscr{A}\left(\frac{1}{e}\right) = 1 - \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} - \frac{1}{\frac{1}{e}} = 1 - \frac{-1}{\frac{1}{e}} - \frac{1}{\frac{1}{e}} = 1 = \ell$.

Exercice 5 :

1. figure



2. À tout $M(z)$, on associe $M'(z')$ tel que $z' = z^2 - 4z$.
   Soit $a = 1 + \mathrm{i}$ l'affixe de A et soit a' celle de A' : $a' = (1+\mathrm{i})^2 - 4(1+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} - 4(1+\mathrm{i}) = -4 - 2\mathrm{i}$.
   Soit $b = 3 - \mathrm{i}$ affixe de B et soit b' celle de B' : $b' = (3-\mathrm{i})^2 - 4(3-\mathrm{i}) = 8 - 6\mathrm{i} - 4(3-\mathrm{i}) = -4 - 2\mathrm{i}$.
   Les points A′ et B′ sont identiques.

3. Les points qui ont pour image le point d'affixe -5 ont pour affixe z, solutions de l'équation $z^2 - 4z = -5$.
   $z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0$.
   $\Delta = -4 < 0$. L'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{4 - 2\mathrm{i}}{2} = 2 - \mathrm{i}$ et $z_2 = 2 + \mathrm{i}$.
   Les deux points ayant pour image le point d'affixe -5 on pour affixe $-2 - \mathrm{i}$ et $-2 + \mathrm{i}$.

3. Les points qui ont pour image le point d'affixe -5 ont pour affixe z, solutions de l'équation $z^2-4z=-5$.
$z^2-4z=-5 \Leftrightarrow z^2-4z+5=0$.
$\Delta=-4<0$. L'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{4-2\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$ et $z_2=2+\mathrm{i}$.
$\boxed{\text{Les deux points ayant pour image le point d'affixe -5 on pour affixe } -2-\mathrm{i} \text{ et } -2+\mathrm{i}.}$

4. (a) Pour tout z, $z'+4=z^2-4z+4=z^2-2\times z\times 2+2^2=(z-2)^2$.
   (b) • Alors, $|z'+4|=\left|(z-2)^2\right|=|z-2|^2$.
   • Pour tout $z\neq 2$, $\arg(z'+4)=\arg\left((z-2)^2\right)=2\arg(z-2)$ modulo 2π.
   (c) On suppose que M décrit le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon 2. $z_M=2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.
   On a alors : $|z'+4|=|z_M-2|^2=IM^2=2^2=4$. Appelons J le point d'affixe -4. On a alors $JM'=4$
   $\arg(z'+4)=2\arg(z-2)=2\theta$.
   On trouve que $\arg(z'+4)=\arg(z'-z_J)$ décrit $\mathbb{R}$.
   $\boxed{\text{Par conséquent, } M' \text{ décrit le cercle de centre J et de rayon 4.}}$

5. Soient $\mathrm{E}\left(2+2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right)$ et E' l'image de E.
   (a) E est un point de $\mathscr{C}$. IE=2 : une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IE}\right)$ est $\dfrac{\pi}{3}$.
   (b) D'après les questions précédentes, E' est un point de $\mathscr{C}'$ donc $\boxed{\text{JE'=4}}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{JE'}\right)=$
   $2\left(\vec{u}\,;\,\overrightarrow{IE}\right)=\boxed{\dfrac{2\pi}{3}}$.
   (c) On sait que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$ donc J' est le point de $\mathscr{C}'$ d'affixe $-\dfrac{1}{2}$ et d'ordonnée positive (car $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)>0$)